

Varianța 65

SUBIECTUL I

- a) $l=11$
- b) $AC=3$.
- c) $AB=\sqrt{2}$.
- d) $\bar{z}=2-3i$.
- e) $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$.
- f) $\cos A=0$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $(f \circ g)(x)=7-6x$.
- b) Punctul de intersecție este $A(1,1)$
- c) $f(1)+f(2)+\dots+f(10)=145$.
- d) $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.
- e) $\sqrt{f(3)+g(3)}=2 \in \mathbf{N}$.

2.

- a) $f'(x)=2x+\frac{2}{x^3}$.
- b) $x=0$ este ecuația asimptotei verticale.
- c) $f'(x)=\frac{2x^4+2}{x^3}<0, \forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow$ funcția f este descrescătoare pe $(-\infty, 0)$.
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 f(x)=\infty$.
- e) $\int_1^{\sqrt{2}} f(x)dx=\frac{7\sqrt{2}-8}{6}$.

SUBIECTUL III

- a) Efectuăm calculul: $(x+3i)(y+3i)-3i=xy+3ix+3iy-9-3i$.

- b) $(x \circ y) \circ z = (x + 3i)(y + 3i)(z + 3i) - 3i$
 $x \circ (y \circ z) = (x + 3i)(y + 3i)(z + 3i) - 3i \Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \forall x, y, z \in \mathbf{C}$
- c) Efectuăm calculul: $x \circ e \stackrel{a)}{=} (x + 3i)(e + 3i) - 3i = x + 3i - 3i = x \quad \forall x \in \mathbf{C}.$
- d) Pentru $a = 1 - 2i$ și $b = 1 - i \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, avem: $a \circ b \stackrel{a)}{=} (a + 3i)(b + 3i) - 3i = -1 \in \mathbf{R}.$
- e) Fie $P(n): \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x + 3i)^n - 3i.$
 $P(1): x = x(A).$
 Presupunem $P(k)(A)$ și demonstrăm $P(k+1)(A)$, unde $k \geq 1$.
 $P(k): \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } k \text{ ori}} = (x + 3i)^k - 3i$, iar $P(k+1): \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } k+1 \text{ ori}} = (x + 3i)^{k+1} - 3i.$
 Dar $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } k+1 \text{ ori}} = \left(\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } k \text{ ori}} \right) \circ x \stackrel{P(k)}{=} ((x + 3i)^k - 3i) \circ x \stackrel{a)}{=}$
 $= [(x + 3i)^k - 3i + 3i](x + 3i) - 3i = (x + 3i)^{k+1} - 3i.$
 De unde $P(n)$ este $(A) \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$
- f) Folosind e) avem că $z = (4 + 3i)^{2002} - 3i$ de unde $\overline{z + 3i} = (4 - 3i)^{2007}$
- g) Folosind e) ecuația devine: $(x + 3i)^2 - 3i = -3i \Leftrightarrow (x + 3i)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3i.$

SUBIECTUL IV

- a) $f_0(-x) = e^{-x} + e^{-(-x)} = e^{-x} + e^x = f_0(x), \forall x \in \mathbf{R}.$
- b) $f_0(x) \geq 2 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} \geq 2 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 \geq 0 (A)$
- c) $f_1(x) = (f_0(x))' = e^x - e^{-x}.$
- d) Fie $P(n): f_{2n}(x) = f_0(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}.$
 $P(0): f_0(x) = f_0(x)(A).$
 Presupunem $P(k)(A)$ și demonstrăm $P(k+1)(A)$, unde $k \geq 0$.
 $P(k): f_{2k}(x) = f_0(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$, iar
 $P(k+1): f_{2k+2}(x) = f_0(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}.$ Dar:
 $f_{2k+2}(x) = (f_{2k+1}(x))' = \left((f_{2k}(x))' \right)' \stackrel{P(k)}{=} \left((f_0(x))' \right)' = (f_1(x))' \stackrel{c)}{=} (e^x - e^{-x})' =$
 $= e^x + e^{-x} = f_0(x).$ De unde $P(n)$ este $(A) \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$ Deci $f_{2n}(x) = f_0(x), \forall x \in \mathbf{R}.$
 Dar $f_{2n+1}(x) = (f_{2n}(x))' = (f_0(x))' = f_1(x), \forall x \in \mathbf{R}.$

e) $\int_0^x f_1(t) dt = \int_0^x (f_0(t))' dt = f_0(t) \Big|_0^x = f_0(x) - f_0(0) = f_0(x) - 2, \forall x \in \mathbf{R}.$

f) Folosind **d)** rezultă că $f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_{2007}(x) = 1004 f_0(x) + 1004 f_1(x) = 1004(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}) = 2008e^x$. Atunci integrala devine:

$$\int_0^1 2008e^x dx = 2008e^x \Big|_0^1 = 2008(e - 1).$$

g) Folosind **d)** rezultă că $f_0(0) = f_2(0) = \dots = f_{2k}(0) = 2$ și

$f_1(0) = f_3(0) = \dots = f_{2k+1}(0) = 0$. Dacă n este număr par atunci: $n = 2k; k \in \mathbf{N}$.

Avem $f_0(0) + f_1(0) + \dots + f_{2k}(0) = 2k + 2 = n + 2$, iar dacă n este impar atunci

$n = 2k + 1; k \in \mathbf{N}$ și $f_0(0) + f_1(0) + \dots + f_{2k+1}(0) = 2k + 2 = n - 1 + 2 = n + 1$. Deci limita cerută este 1.